

Riccardo Colamatteo
“Algebra e Geometria”

Proprietà letteraria riservata
© Riccardo Colamatteo

© Kion Editrice, Terni
Prima Edizione marzo 2018

ISBN: 978-88-99942-17-5

Copertina: *progetto grafico dell'autore*

Stampa: Universal Book, Rende (CS)

www.kioneditrice.it
info@kioneditrice.it



RICCARDO COLAMATTEO

ALGEBRA E GEOMETRIA

TEORIA DEGLI INSIEMI, SPAZI NUMERICI LINEARMENTE
ORDINATI, GEOMETRIA E SPAZIO NUMERICO COMPLESSO,
TRASFORMAZIONI LINEARI E TEORIA DEI GRAFI, OCTAVE,
L^AT_EX.



INDICE BREVE

1	TEORIA DEGLI INSIEMI	9
1.1	Insiemi	9
1.2	Relazioni, applicazioni, operatori	10
1.3	Quantificatori, connettivi, implicazioni	12
1.4	Operatori logici	13
1.5	Proprietà di relazioni, applicazioni, operatori	15
1.6	Equivalenze ed ordinamenti	18
2	SPAZI NUMERICI LINEARMENTE ORDINATI	21
2.1	Naturali ed interi assoluti	21
2.2	Calcolo combinatorio e binomio di Newton	30
2.3	Interi relativi	36
2.4	Razionali	37
2.5	Reali	45
2.6	Problemi reali, algoritmi e numero di condizionamento	52
3	GEOMETRIA E SPAZIO NUMERICO COMPLESSO	53
3.1	Elementi d'Euclide	53
3.2	Strutture algebriche classiche	60
3.3	Goniometria e trigonometria	70
3.4	Prodotti scalare, vettoriale e misto	86
3.5	Geometria analitica elementare	90
3.6	Spazio numerico complesso	102
4	TRASFORMAZIONI LINEARI E TEORIA DEI GRAFI	109
4.1	Applicazioni lineari dirette	109
4.2	Risoluzione di sistemi lineari	120
4.3	Inversione di un sistema lineare	134
4.4	Diagonalizzazione di una matrice	139
4.5	Teoria dei grafi e riducibilità di una matrice	149
4.6	Norme e condizionamento di matrici	154
4.7	Interpolazione polinomiale di Lagrange e matrici di Vandermonde	156

5	OCTAVE	161
5.1	Scalari, vettori, matrici, polinomi	161
5.2	Operatori e funzioni	164
5.3	Grafici	170
6	L ^A T _E X	175
6.1	Semplici documenti di testo	176
6.2	Composizione matematica	191
6.3	Grafica	197
6.4	Formattazione avanzata	201
	Alfabeto greco	203
	Bibliografia	205

INDICE DETTAGLIATO

1	TEORIA DEGLI INSIEMI	9
1.1	Insiemi	9
1.2	Relazioni, applicazioni, operatori	10
1.3	Quantificatori, connettivi, implicazioni	12
1.4	Operatori logici	13
1.5	Proprietà di relazioni, applicazioni, operatori	15
1.5.1	Proprietà delle relazioni	15
1.5.2	Proprietà delle applicazioni	16
1.5.3	Proprietà degli operatori	16
1.6	Equivalenze ed ordinamenti	18
2	SPAZI NUMERICI LINEARMENTE ORDINATI	21
2.1	Naturali ed interi assoluti	21
2.1.1	Insieme dei naturali secondo Peano	21
2.1.2	Somma e sommazione in \mathbb{N}^+	22
2.1.3	Proprietà formali	22
2.1.4	Interi assoluti	23
2.1.5	Asse numerico naturale	23
2.1.6	Differenze in \mathbb{N}	24
2.1.7	Prodotto e produttoria in \mathbb{N}	24
2.1.8	Quozienti in \mathbb{N}	25
2.1.9	Elevamento a potenza in \mathbb{N}	25
2.1.10	Radici e logaritmi in \mathbb{N}	26
2.1.11	Numeri primi e teorema fondamentale dell'aritmetica	26
2.1.12	Massimo comun divisore e minimo comune multiplo	27
2.1.13	Monomi e polinomi	27
2.2	Calcolo combinatorio e binomio di Newton	30
2.2.1	Fattoriali	30
2.2.2	Permutazioni	30
2.2.3	Disposizioni	31
2.2.4	Combinazioni	32
2.2.5	Binomio di Newton	34
2.2.6	Formula di Stiefel e triangolo di Tartaglia	34

2.3	Interi relativi	36
2.4	Razionali	37
2.4.1	Numeri con la virgola e rappresentazione posizionale	39
2.4.2	Razionali periodici	40
2.4.3	Calcolo di radici a mano	43
2.5	Reali	45
2.5.1	Equazioni algebriche di secondo grado	46
2.5.2	Equazioni algebriche di terzo grado	47
2.5.3	Equazioni algebriche di grado quarto e superiore	49
2.5.4	Grafici di funzione	50
2.5.5	Applicazioni lineari	51
2.6	Problemi reali, algoritmi e numero di condizionamento	52
3	GEOMETRIA E SPAZIO NUMERICO COMPLESSO	53
3.1	Elementi d'Euclide	53
3.1.1	Le 23 definizioni	53
3.1.2	I 5 postulati	55
3.1.3	I 5 assiomi	55
3.1.4	I 48 teoremi	55
3.1.5	5° postulato e geometrie non euclidee	58
3.2	Strutture algebriche classiche	60
3.2.1	Reticoli ed algebre di Boole	61
3.2.2	Spazi metrici e Teorema di Pitagora	61
3.2.3	Gruppidi, semigrupperi, monoidi, gruppi	63
3.2.4	Anelloidi, semianelli, anelli, corpi, campi	63
3.2.5	Spazi vettoriali	64
3.2.6	Spazi normati	66
3.2.7	Spazi euclidei	66
3.2.8	Algebre lineari e di Lie	67
3.2.9	Spazi affini	68

3.3	Goniometria e trigonometria	70
3.3.1	Misura degli angoli	70
3.3.2	Seno, coseno, tangente e cotangente	73
3.3.3	Periodicità, simmetrie e traslazioni	76
3.3.4	Funzioni iperboliche	76
3.3.5	Angoli tra rette incidenti	77
3.3.6	Angoli interni ad un triangolo	79
3.3.7	Teoremi del coseno, dei seni, di Euclide	80
3.3.8	Addizione e sottrazione degli archi	82
3.3.9	Coordinate polari, cilindriche e sferiche	84
3.4	Prodotti scalare, vettoriale e misto	86
3.4.1	Prodotto scalare	86
3.4.2	Prodotto vettoriale	87
3.4.3	Prodotto misto	88
3.5	Geometria analitica elementare	90
3.5.1	Luoghi geometrici	90
3.5.2	Le rette	90
3.5.3	I piani	93
3.5.4	Le coniche	95
3.5.5	Le quadriche	98
3.6	Spazio numerico complesso	102
3.6.1	Forma trigonometrica dei numeri complessi	102
3.6.2	Somma e prodotto in \mathbb{C}	104
3.6.3	Quozienti in \mathbb{C}	105
3.6.4	Elevamento a potenza, radice e logaritmo di un numero complesso	106
3.6.5	Spazi pre-hilbertiani	107

4	TRASFORMAZIONI LINEARI E TEORIA DEI GRAFI	109
4.1	Applicazioni lineari dirette	109
4.1.1	Caratterizzazione delle applicazioni lineari dirette	109
4.1.2	Applicazioni lineari dirette in rappresentazione algebrica	111
4.1.3	Introduzione della rappresentazione matriciale	113
4.1.4	Matrici generiche	114
4.1.5	Somma tra applicazioni lineari	115
4.1.6	Prodotto d'una applicazione lineare per uno scalare	116
4.1.7	Prodotto di composizione	116
4.1.8	Matrici di permutazione	119
4.2	Risoluzione di sistemi lineari	120
4.2.1	Equazioni algebriche lineari	120
4.2.2	Sistemi lineari	120
4.2.3	Risoluzione geometrica	121
4.2.4	Risoluzione algebrica: i determinanti	123
4.2.5	Risoluzione per sostituzione	130
4.2.6	Risoluzione secondo Gauss - Jordan	131
4.3	Inversione di un sistema lineare	134
4.4	Diagonalizzazione di una matrice	139
4.4.1	Autodirezioni, autovettori ed autovalori	139
4.4.2	Equazioni algebriche non lineari in forma matriciale	143
4.4.3	Localizzazione degli autovalori	144
4.4.4	Forma canonica di Jordan	145
4.4.5	Forma canonica di coniche e quadriche	147
4.5	Teoria dei grafi e riducibilità di una matrice	149
4.5.1	Grafi	149
4.5.2	Rappresentazione matriciale di un grafo	151
4.5.3	Grafi fortemente connessi e riducibilità di una matrice	152
4.6	Norme e condizionamento di matrici	154
4.7	Interpolazione polinomiale di Lagrange e matrici di Vandermonde	156

5	OCTAVE	161
5.1	Scalari, vettori, matrici, polinomi	161
5.1.1	Generalità	161
5.1.2	Variabili: definizione ed assegnazione	161
5.1.3	Vettori e matrici	162
5.1.4	Polinomi	163
5.2	Operatori e funzioni	164
5.2.1	Operatori	164
5.2.2	Funzioni matematiche predefinite	166
5.2.3	Definizione di funzioni	167
5.2.4	Funzioni di controllo	167
5.3	Grafi	170
6	L ^A T _E X	175
6.1	Semplici documenti di testo	176
6.1.1	Struttura minimale di un documento L ^A T _E X	176
6.1.2	Inserimento del testo	178
6.1.3	Rappresentazione del testo	181
6.1.4	Titolo, autore e data	181
6.1.5	Sezionamento di un documento ed indici	183
6.1.6	Liste	184
6.1.7	Tabelle, tavole e riferimenti	184
6.1.8	Annotazioni	185
6.2	Composizione matematica	191
6.2.1	Ambienti matematici	191
6.2.2	Font matematici	191
6.2.3	Ambiente array	192
6.3	Grafica	197
6.3.1	Inserimento di immagini esterne con <code>graphicx</code>	197
6.3.2	Inserimento di grafici esterni con <code>wrapfig</code>	197
6.3.3	Contenuti grafici inusuali: gli scacchi	197
6.4	Formattazione avanzata	201
6.4.1	Ri-definizione dei comandi	201
6.4.2	Modifica dei margini di pagina	201
6.4.3	Numerazione delle pagine	201
6.4.4	Contenuti condizionati	202
	Alfabeto greco	203
	Bibliografia	205

 TEORIA DEGLI INSIEMI

Vedi: [1].

*“Il tuo compito è scoprire qual è il tuo compito,
e dedicartici con tutto il tuo cuore.”* Buddha

1.1 Insiemi

Chiamiamo **insieme, classe, famiglia, gruppo o spazio** ciascuna collezione di enti generici detti **elementi, membri, oggetti o punti**. Distinguiamo tra spazi finiti od infiniti a seconda sia possibile o meno definire finito il numero degli elementi ad essi appartenenti; lo spazio privo di elementi è detto insieme vuoto \emptyset , e lo spazio di tutti gli elementi insieme universo U . Un insieme è conosciuto quando risulta possibile definire con certezza se un dato elemento vi appartenga o meno.

Per soli insiemi finiti possiamo semplicemente elencare i termini componenti, e quindi servirci di una rappresentazione per estensione grazie a scritte del genere $S = \{a, b, c, d\}$; tra parentesi graffe indichiamo insiemi non ordinati, dunque tali d'aversi $\{a, b, c, d\} = \{b, a, d, c\}$, e tra tonde insiemi ordinati, quindi per i quali $(a, b, c, d) \neq (b, a, d, c)$; la rappresentazione di un insieme ordinato nasce considerando l'insieme delle sue parti componenti, e quindi ad esempio ponendo $(a, b, c, d) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$.

Quale cardinalità, numerosità o potenza $|I|$ di un dato insieme finito I , definiamo il numero degli elementi appartenenti allo stesso. Di uno spazio I , l'insieme delle parti a cardinalità fissata è dunque dato da $[I]^n = \{S \in \wp(I) : |S| = n\}$; ad esempio, per lo spazio $I = \{a, b, c\}$ abbiamo $\wp(I) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, I\}$ e dunque $[I]^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.

Alla rappresentazione per estensione si affianca una rappresentazione grafica, detta di Eulero-Venn, formata da cerchi o generiche poligonali chiuse rappresentanti gli insiemi che contengono al loro interno punti introdotti ad indicare i membri dell'insieme stesso; nelle figg. 1 e 2 sono ad esempio date le rappresentazioni di Eulero-Venn degli spazi non ordinato $S = \{a, b, c, d\}$ ed ordinato $S = (a, b, c, d)$.

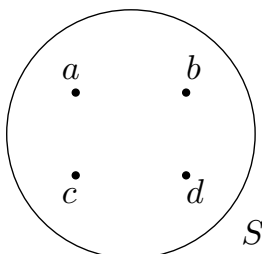


Figura 1: Insieme non ordinato in rappresentazione di Eulero-Venn.

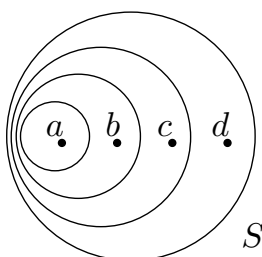


Figura 2: Insieme ordinato in rappresentazione di Eulero-Venn.

1.2 Relazioni, applicazioni, operatori

Non potendosi di certo formare nella pratica scritte infinitamente lunghe o grafi con infiniti distinguibili punti, ricerchiamo un qualsiasi modo per rappresentare spazi ad infiniti elementi.